28 वाँ भारतीय राष्ट्रीय गणित ओलम्पियाड- 2013

समय: 4 घंटे **3 फरवरी 2013**

अनुदेश:

- **किसी भी तरह के कैलकुटेर तथा चांदा (protractors) के प्रयोग की अनुमति नहीं है।**
- **मापक (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है।**
- **सभी प्रश्नों का उत्तर दीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।**
- **प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक नए पृष्ठ से आरम्भ कीजिये। प्रश्न संख्या का स्पष्ट उल्लेख कीजिये।**

1. माना कि दो वृत्त Γ_1 और Γ_2 एक दूसरे को बिंदु R पर बाह्यत: स्पर्श करते हैं। माना कि रेखा l_1 जो कि Γ_2 पर बिंदु P पर स्पर्शरेखीय है, Γ_1 के केन्द्र O_1 से गुजरती है। उसी तरह रेखा l_2 जो कि Γ_1 पर बिंदु Q पर स्पर्शरेखीय है, Γ_2 के केंद्र O_2 से गुजरती है। माना कि l_1 और l_2 समान्तर नहीं हैं तथा एक दूसरे को बिंदु K पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $KP = KQ$, तो सिद्ध कीजिये कि त्रिभुज PQR एक समबाहु त्रिभुज है।

2. वे सभी धनात्मक पूर्णांक m, n तथा अभाज्य संख्याएं $p \geq 5$ इस तरह ज्ञात कीजिये कि

$$m(4m^2 + m + 12) = 3(p^n - 1)$$

3. माना कि धनात्मक पूर्णांक a, b, c, d इस प्रकार हैं कि $a \geq b \geq c \geq d$ । सिद्ध कीजिये कि समीकरण $x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0$ का कोई पूर्णांक हल नहीं है।

4. माना कि n एक धनात्मक पूर्णांक है। $\{1, 2, 3, ..., n\}$ के अरिक्त उपसमुच्चय S को उत्तम (good) मानते हैं यदि S के अवयवों का समांतर माध्य भी एक पूर्णांक हो। साथ ही मान लीजिये कि t_n, $\{1, 2, 3, ..., n\}$ के उत्तम (good) उपसमुच्चयों की संख्या को निरूपित करता है। सिद्ध कीजिये कि t_n तथा n या तो दोनों विषम हैं अथवा दोनों सम हैं।

5. एक न्यूनकोण त्रिभुज ABC का परिकेंद्र O, लंबकेंद्र H तथा केन्द्रक G है। माना कि OD, BC के लंबवत तथा HE, CA के लंबवत इस प्रकार है कि बिंदु D रेखा BC पर तथा बिंदु E रेखा CA पर है। माना कि AB का मध्य बिंदु F है। यदि त्रिभुज ODC, HEA तथा GFB के क्षेत्रफल एक समान हैं तो $\angle C$ के सभी संभव मान ज्ञात कीजिये।

6. मान लीजिये कि धनात्मक वास्तविक संख्याएं a,b,c,x,y,z इस प्रकार हैं कि $a + b + c = x + y + z$ तथा $abc = xyz$। माना कि $a \leq x < y < z \leq c$ तथा $a < b < c$ । सिद्ध कीजिये कि $a = x$, $b = y$ तथा $c = z$

----------000----------

28th Indian National Mathematical Olympiad-2013

Time: 4 hours **February 03, 2013**

Instructions:

- **Calculators (in any form) and protractors are not allowed.**
- **Rulers and compasses are allowed.**
- **Answer all the questions. All questions carry equal marks.**
- **Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.**

1. Let Γ_1 and Γ_2 be two circles touching each other externally at R. Let l_1 be a line which is tangent to Γ_2 at P and passing through the centre O_1 of Γ_1 . Similarly, let l_2 be a line which is tangent to Γ_1 at Q and passing through the centre O_2 of Γ_2 . Suppose l_1 and l_2 are not parallel and intersect at K. If $KP = KQ$, prove that the triangle PQR is equilateral.
2. Find all positive integers m, n and primes $p \geq 5$ such that
$$m(4m^2 + m + 12) = 3(p^n - 1) .$$
3. Let a, b, c, d be positive integers such that $a \geq b \geq c \geq d$. Prove that the equation $x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0$ has no integer solution.
4. Let n be a positive integer. Call a nonempty subset S of $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ good if the arithmetic mean of the elements of S is also an integer. Further let tn denote the number of good subsets of $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Prove that t_n and n are both odd or both even.
5. In an acute triangle ABC, O is the circumcentre, H the orthocentre and G the centroid. Let OD be perpendicular to BC and HE be perpendicular to CA, with D on BC and E on CA. Let F be the mid-point of AB. Suppose the areas of triangles ODC, HEA and GFB are equal. Find all the possible values of $\angle C$.
6. Let a,b,c,x,y,z be positive real numbers such that $a + b + c = x + y + z$ and $abc = xyz$. Further, suppose that $a \leq x < y < z \leq c$ and $a < b < c$. Prove that $a = x$, $b = y$ and $c = z$.

----------000---------